

Desarrollo del modelo matemático para un brazo robótico de tres eslabones con un grado de libertad en cada eslabón.

Development of the Mathematical Model for a Three-Link Robotic Arm with One Degree of Freedom per Link

Mónica Alexandra Carrión Cevallos¹[0000-0003-0928-1307], Juan Carlos Concha Arrieta²[0000-0001-9578-7704]

¹ Universidad Nacional de Chimborazo – Postgrado – Matemática Aplicada– Ecuador, moncacevallos@yahoo.es

² Universidad Nacional de Chimborazo – Postgrado – Matemática Aplicada– Ecuador, jcconcha@unach.edu.ec

CITA EN APA:

Carrión Cevallos, M. A., & Concha Arrieta, J. C. (2025). Un Desarrollo del modelo matemático para un brazo robótico de tres eslabones con un grado de libertad en cada eslabón. Technology Rain Journal, 4(1). <https://doi.org/10.55204/trj.v4i1.e65>

Recibido: 25 de febrero-2025

Aceptado: 28 de marzo-2025

Publicado: 10 de abril-2025

Technology Rain Journal

ISSN: 2953-464X

Resumen.

La robótica ha presentado avances considerables en las últimas décadas, particularmente en la automatización de procesos industriales, médicos y educativos. Los brazos robóticos, una de las tecnologías más utilizadas, permiten realizar tareas con alta precisión y eficiencia. La necesidad de un modelo matemático preciso y optimizado es fundamental para garantizar el desempeño adecuado de estos robots en entornos industriales. En este estudio, se aborda el modelado matemático de un brazo robótico de tres eslabones y un grado de libertad por articulación, utilizando el método de Denavit-Hartenberg (D-H), una herramienta analítica para predecir su comportamiento y mejorar la exactitud en la ejecución de tareas. La implementación computacional de este modelo en Python facilita la validación de resultados y la simulación del movimiento del manipulador. El objetivo de este artículo es desarrollar un modelo matemático accesible que permita a estudiantes e investigadores comprender la cinemática de los brazos robóticos y optimizar su desempeño. Los resultados obtenidos demuestran la efectividad de este enfoque para mejorar el control y la precisión en la ejecución de movimientos, confirmando su utilidad en aplicaciones industriales. La comparación entre los enfoques analítico y computacional valida el modelo, proporcionando una base confiable para la optimización del robot.

Palabras Clave: Cinemática directa, Brazo Robótico, Modelado Matemático, Denavit- Hartenberg

Abstract:

Robotics has made considerable advances in recent decades, particularly in the automation of industrial, medical, and educational processes. Robotic arms, one of the most widely used technologies, enable tasks to be performed with high precision and efficiency. The need for a correct and perfected mathematical model is essential to ensure the proper performance of these robots in industrial environments. This study addresses the mathematical modeling of a three-link robotic arm with one degree of freedom per joint, using the Denavit-Hartenberg (D-H) method—an analytical tool for predicting its behavior and improving accuracy in task execution. The computational implementation of this model in Python helps result validation and manipulator motion simulation. The aim of this article is to develop an accessible mathematical model that allows students and researchers to understand the kinematics of robotic arms and perfect their performance. The results prove the effectiveness of this approach in improving control and precision in movement execution, confirming its usefulness in industrial applications. The comparison between analytical and computational approaches confirms the model, providing a reliable basis for robot optimization.

Keywords: Direct kinematics, Robotic Arm, Mathematical Modeling, Denavit-Hartenberg



Los contenidos de este artículo están bajo una licencia de Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Los autores conservan los derechos morales y patrimoniales de sus obras.

1. INTRODUCCIÓN

La robótica ha experimentado un crecimiento significativo en las últimas décadas, desempeñando un papel fundamental en la automatización de procesos industriales, médicos y educativos (Velásquez Correa & Luces, 2014). Dentro de este campo, los brazos robóticos son una de las tecnologías más utilizadas, ya que permiten realizar tareas con alta precisión y eficiencia. Sin embargo, su diseño, fabricación y modelado matemático representan desafíos técnicos y económicos, lo que limita su accesibilidad en entornos educativos y de investigación. (Graterol, 2024).

Un brazo robótico es un sistema mecánico automatizado diseñado para replicar los movimientos de un brazo humano, compuesto por eslabones y articulaciones cuyo control preciso es esencial para garantizar un desempeño óptimo en tareas industriales y de alta precisión (Alvarado & Gualteros, 2019). En este estudio, se aborda el modelado matemático de un brazo robótico de tres eslabones y un grado de libertad por articulación, con el fin de optimizar su desempeño y mejorar la precisión en sus movimientos. El diseño del manipulador se realiza mediante un software CAD y se fabrica utilizando impresión 3D, lo que facilita la implementación y pruebas. Este enfoque busca asegurar que el brazo robótico pueda replicar movimientos con exactitud y eficiencia, características fundamentales para su uso en entornos industriales y automatizados (Castillo, 2022).

El estudio de este problema es relevante, ya que contribuye a una mejor comprensión de los principios cinemáticos de los brazos robóticos, utilizando como base el modelado matemático a través del método de Denavit-Hartenberg (D-H). Este enfoque ofrece una herramienta analítica poderosa para predecir el comportamiento de los sistemas, mientras que la implementación computacional en Python permite validar y visualizar los resultados de manera eficiente (Cáceres Núñez, 2023).

En los últimos años, diversos estudios han analizado el modelado y control de brazos robóticos utilizando métodos analíticos y computacionales. Investigaciones previas como “Modelado matemático de brazo robot con 3DoF usando Matlab” ha examinado el modelado matemático de manipuladores robóticos antropomorfos con tres grados de libertad, empleando la parametrización de Denavit-Hartenberg (D-H) para sintetizar la geometría del sistema. A través de este método, se ha logrado calcular la cinemática directa y representar el movimiento del manipulador en simulaciones, obteniendo datos analíticos mediante matrices simbólicas (Velásquez Correa & Luces, 2014).

En el 2022 se empleó la parametrización de Denavit-Hartenberg para obtener la cinemática directa y, posteriormente, se calculó la matriz jacobiana para determinar los ángulos articulares requeridos para replicar trayectorias específicas en el robot manipulador KUKA LBR IIWA 14 R820 (Ramírez-López & Martínez-Aragón, 2022).

Este artículo surge de la necesidad de desarrollar un modelo matemático preciso que facilite la comprensión de la cinemática directa de brazos robóticos, optimizando su desempeño en entornos industriales y experimentales. La motivación principal radica en la importancia de contar con herramientas accesibles que permitan a estudiantes e investigadores aprender sobre robótica y mejorar la eficiencia de los manipuladores robóticos sin comprometer la precisión o efectividad en sus aplicaciones. Disponer de un modelo matemático claro y exacto es crucial para predecir y controlar los movimientos del brazo robótico, lo que a su vez facilita su implementación en diversas áreas, desde la automatización industrial hasta la investigación aplicada.

El objetivo de esta investigación es desarrollar y analizar un modelo matemático que describa con precisión la cinemática directa de un brazo robótico con 3DOF, fabricado en plástico mediante impresión 3D. Para ello, se desarrollarán las ecuaciones de la cinemática directa con el fin de determinar las trayectorias y posiciones del brazo dentro de su espacio de trabajo. Este análisis se realizará tanto de forma analítica como computacional, lo que permitirá validar la fiabilidad de la solución obtenida mediante el enfoque analítico.

Se propone diseñar y modelar el brazo robótico impreso en 3D, describir su cinemática mediante ecuaciones matemáticas y validar su desempeño mediante simulaciones computacionales. Para garantizar la precisión del modelo, el proceso comenzará con un enfoque analítico, que incluirá el estudio de la cinemática directa, seguido de la implementación en Python para comprobar los resultados y su viabilidad en aplicaciones industriales y educativas.

El artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan los fundamentos teóricos del modelado matemático de brazos robóticos; en la sección 3 se describe la metodología utilizada para desarrollar el modelo y realizar las simulaciones; en la Sección 4 se exponen los resultados obtenidos y su análisis; finalmente, en la Sección 5 se presentan las conclusiones y posibles trabajos futuros.

2. CONTEXTUALIZACIÓN

El diseño del brazo robótico permite movimientos rotativos alrededor de un eje principal, proporcionando flexibilidad y precisión en el objetivo trabajado. Cada movimiento está gestionado por un motor independiente, lo que garantiza un control exacto de la posición y orientación del brazo. La velocidad otorgada por los motores es constante, lo que permite un desplazamiento ajustado a las tareas que requieren agilidad o un movimiento lento y controlado para operaciones que demandan alta precisión. Este diseño maximiza el desempeño del brazo robótico, haciéndolo ideal para aplicaciones industriales y de investigación que requieren una combinación eficiente de velocidad y exactitud (Suquilanda et al., 2024). Véase figura 1.

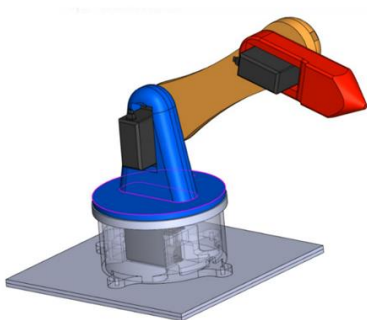


Fig. 1. Brazo robótico.

La modelación cinemática, se inicia con la aplicación de transformaciones homogéneas (conceptos inherentes a un espacio vectorial de cuatro dimensiones), con el fin de describir de manera precisa los cambios en la posición y orientación de los objetos manipulados (Sanz-Fernández, 2021), determinadas mediante los vectores siguientes. Ver figura 2.

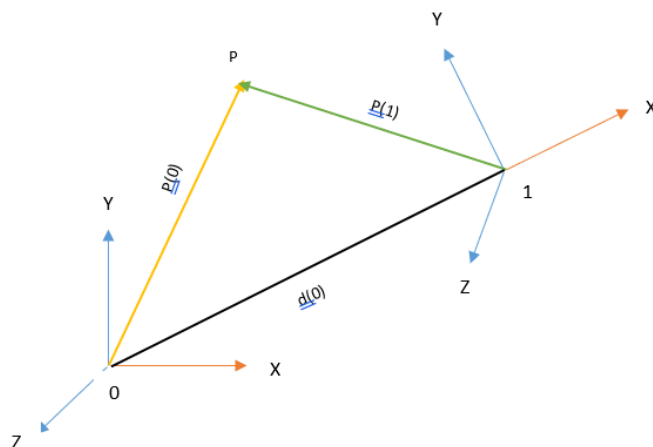


Fig. 2. Posición del punto P a partir de los ejes coordenados 0 y 1

De dónde se puede determinar los vectores de posición, de distancias y matriz de rotación entre dos referenciales (0 y 1).

$$P^{(i)} = \begin{bmatrix} P_x^{(i)} \\ P_y^{(i)} \\ P_z^{(i)} \end{bmatrix} \quad d^{(0)} = \begin{bmatrix} d_x^{(0)} \\ d_y^{(0)} \\ d_z^{(0)} \end{bmatrix} \quad R_{01} \in SO(3) \quad (1)$$

La posición del punto P desde el plano 0 estará determinada por:

$$p^{(0)} = d^{(0)} + R_0^1 p^{(1)} \quad (2)$$

Lo que se puede representar en coordenadas homogéneas de la siguiente manera:

$$p^{(i)} = \begin{bmatrix} P_x^{(i)} \\ P_y^{(i)} \\ P_z^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad p^i = \begin{bmatrix} p^{(i)} \\ 1 \end{bmatrix} \in R^4 \quad (3)$$

A la ecuación 2 se le puede entonces expresar como coordenada homogénea de la siguiente manera:

$$\bar{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} d + R p^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$


 $\bar{p}^{(0)}$

Y la matriz de transformación homogénea será:

$$A = \begin{pmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE \quad (5)$$

Donde:

R es una matriz 3×3 que representa la rotación.

d es un vector columna 3 × 1 que representa la traslación.

Al observar la matriz (5), podemos determinar que las matrices de transformación homogénea, son matrices (4x4) que se utilizan para describir la relación entre dos sistemas de coordenadas en el espacio tridimensional (Reyes Cortez, 2012). Estas matrices combinan transformaciones de rotación y traslación en una sola estructura matemática para describir la posición y orientación de cada eslabón del brazo robótico (Fetter, 2022).

Según (Ramírez-López & Martínez-Aragón, 2022) la cinemática directa permite determinar la posición y orientación del efector final en el espacio tridimensional en función de los ángulos de las articulaciones. y del número de grados de libertad, considerando a ellos, cómo el número de

movimientos independientes que un sistema mecánico, como un robot, puede realizar (Dueñas Vargas & Loja Ávila, 2024).

Se utilizan matrices de transformación homogénea basadas en el formalismo de Denavit-Hartenberg (D-H), una metodología estandarizada para describir las relaciones espaciales entre los eslabones de un robot (Arias & Fonseca, 2012) y llegar a determinar la siguiente matriz:

$$\begin{aligned}
 T_i^{i-1} &= R_z(\theta_i) T_z(d_i) T_x(a_i) R_x(\alpha_i) \\
 &= R_z(\theta_i) T_{x,y,z}(a_i, 0, d_i) R_x(\alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_1 C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_2 S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)
 \end{aligned}$$

La matriz T_i^{i-1} es una función de una sola variable de junta (típicamente) y tres de los cuatro parámetros son constantes para un eslabón determinado. En el caso de una articulación de revoluta θ_i es la variable, mientras que d_i es la variable para una junta prismática (Barrientos et al., 2012).

Dado que cada eslabón se conecta al siguiente mediante una articulación, el formalismo D-H permite definir la posición relativa de los sistemas de coordenadas de eslabones adyacentes utilizando cuatro parámetros fundamentales que son: (Monroy Cruz et al., 2020).

d_1 : Desplazamiento a lo largo del eje Z_{i-1} (distancia entre las articulaciones a lo largo de Z_{i-1} y Z_i).

α_i : Rotación alrededor del eje Z_{i-1} (ángulo entre los ejes X_{i-1} y X_i)

a_i : Longitud del eslabón (distancia entre los ejes X_{i-1} y X_i)

θ_i : Rotación alrededor del eje X_i (rotación en ángulo de los motores, variables)

La determinación del modelo matemático de brazo robótico en estudio a partir de las matrices de transformación homogénea es una ecuación que relaciona los parámetros articulares del robot (D-H) con la posición y orientación del efector final en el espacio. Esto permite predecir dónde estará el efector final dadas las configuraciones articulares, qué viene dado por: (López et al., 2006).

$$T_{\text{total}} = (T_1^0) (T_2^1)(T_3^2) = A_1 A_2 A_3 \quad (7)$$

3. METODOLOGÍA O MATERIALES Y METODOS

Este estudio se enmarca dentro de una investigación aplicada y descriptiva, orientada al desarrollo y análisis de un modelo matemático para la cinemática directa de un brazo robótico de 3DOF. La metodología adoptada sigue un enfoque cuantitativo, basado en el análisis numérico y computacional de las ecuaciones obtenidas. Para validar el modelo, se implementaron simulaciones en Python que permiten visualizar la configuración espacial del brazo en función de los ángulos articulares, proporcionando una representación precisa de su comportamiento.

Tabla 1. Parámetros de Denavit-Hartenberg

i	α_i	a _i	d _i	θ_i
1	α_1	a ₁	d ₁	θ_1
2	α_2	a ₂	d ₂	θ_2
3	α_3	a ₃	d ₃	θ_3

Para validar el modelo matemático desarrollado, se implementa la cinemática directa en un entorno de programación utilizando Python. Se emplean bibliotecas especializadas como NumPy para la manipulación de matrices y SymPy para la resolución simbólica de ecuaciones y Matplotlib/Plotly para la visualización de resultados.

El proceso computacional sigue los siguientes pasos:

Definición de parámetros DH: Se almacenan los parámetros de Denavit-Hartenberg en una estructura de datos adecuada (listas o diccionarios).

Cálculo de matrices de transformación: Se programan las expresiones matemáticas para generar las matrices homogéneas de transformación entre los eslabones.

Obtención de la posición del efector final: Se multiplica la secuencia de matrices de transformación para obtener la posición y orientación del efector final con respecto a la base.

Visualización y verificación: Se grafican las posiciones del brazo robótico en diferentes configuraciones articulares utilizando Matplotlib y Plotly, permitiendo analizar su comportamiento en el espacio de trabajo.

Se comparan los resultados obtenidos mediante cálculos numéricos y gráficos con el análisis analítico, asegurando la coherencia del modelo.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Solución analítica Cinemática Directa

En la figura 3 determinamos el número de eslabones del brazo robótico que son 3, entonces $i=3$

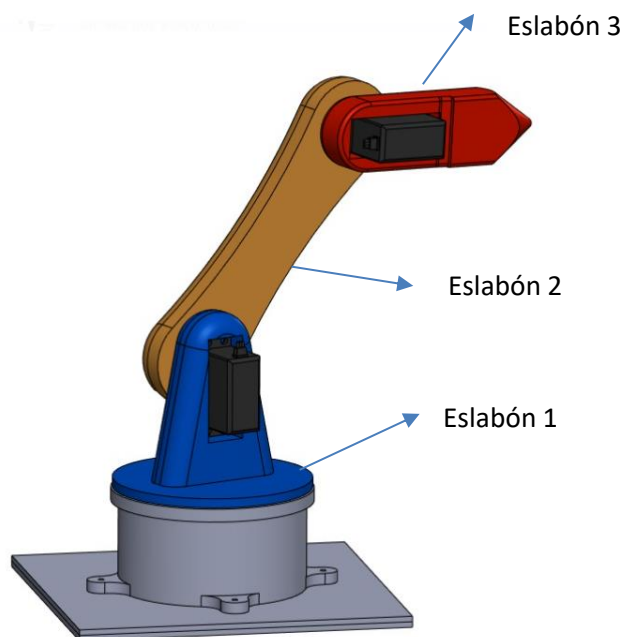


Fig. 3. Identificación del número de eslabones

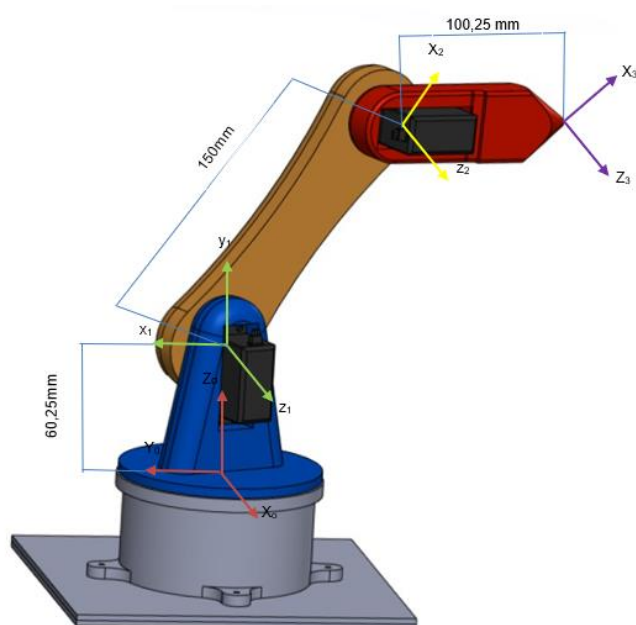


Fig. 4. Ubicación gráfica de los ejes según la metodología de Denavit-Hartenberg y distancias a_i

Tabla 2. Determinación de los parámetros de Denavit-Hartenberg para el brazo robótico en estudio.

i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	90°	0	60,25	θ_1
2	0°	150	0	θ_2
3	0°	100,25	0	θ_3

Aclaración 1. donde Se analiza tres motores θ_1 , θ_2 , θ_3 , que se encuentran desfasados con los planos cartesianos, el θ_1 , está en el plano 0, el θ_2 en el plano 1, y así sucesivamente.

- Obtención de las matrices A_i , según ecuación (6), siendo $A=3$

$$A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 C90^\circ & S\theta_1 S90 & 0C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 C90 & -C\theta_1 S90 & 0S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C90 & 60,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 60,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 C0 & S\theta_2 S0 & 150C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 C0 & -C\theta_2 S0 & 150S\theta_2 \\ 0 & S0 & C0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 150 * \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 150 * \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C\theta_3 & -S\theta_3 C0 & S\theta_3 S0 & 100,25C\theta_3 \\ S\theta_3 & C\theta_3 C0 & -C\theta_3 S0 & 100,25S\theta_3 \\ 0 & S0 & C0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 100,25 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 100,25 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al aplicar la ecuación (7) obtenemos la siguiente matriz, la misma que se desarrolló en una calculadora de matrices y que representa la transformación homogénea del extremo del brazo robótico con respecto a la base.

$$\begin{bmatrix} -s(\theta_2)s(\theta_3)c(\theta_1) + c(\theta_1)c(\theta_2)c(\theta_3) & -s(\theta_2)c(\theta_1)c(\theta_3) - s(\theta_3)c(\theta_1)c(\theta_2) & s\theta_1 & -100.25s(\theta_2)s(\theta_3)c(\theta_1) + 100.25c(\theta_1)c(\theta_2)c(\theta_3) + 150c(\theta_1)c(\theta_2) \\ -s(\theta_1)s(\theta_2)s(\theta_3) + s(\theta_1)c(\theta_2)c(\theta_3) & -s(\theta_1)s(\theta_2)c(\theta_3) - s(\theta_1)s(\theta_3)c(\theta_2) & -c(\theta_1) & -100.25s(\theta_1)s(\theta_2)s(\theta_3) + 100.25s(\theta_1)c(\theta_2)c(\theta_3) + 150s(\theta_1)c(\theta_2) \\ s(\theta_2)c(\theta_3) + s(\theta_3)c(\theta_2) & -s(\theta_2)s(\theta_3) + c(\theta_2)c(\theta_3) & 0 & 100.25s(\theta_2)c(\theta_3) + 150s(\theta_2) + 100.25s(\theta_3)c(\theta_2) + 60.251 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De donde se puede determinar qué:

- **Orientación del extremo del brazo**

La submatriz 3×3 en la esquina superior izquierda define la orientación del extremo del robot en función de los ángulos θ_1 , θ_2 , θ_3 . Cada fila representa la dirección de los ejes del sistema de referencia del extremo en relación con la base.

- Primera fila: Indica la dirección del eje X del extremo en términos de la base.
- Segunda fila: Representa la dirección del eje Y del extremo.
- Tercera fila: Muestra la dirección del eje Z del extremo.

- **Posición del extremo en el espacio**

La última columna (Px,Py,Pz) nos da la posición del extremo del brazo robótico en coordenadas cartesianas:

$$Px = -100.25s(\theta_2)s(\theta_3)c(\theta_1) + 100.25c(\theta_1)c(\theta_2)c(\theta_3) + 150c(\theta_1)c(\theta_2)$$

$$Py = -100.25s(\theta_1)s(\theta_2)s(\theta_3) + 100.25s(\theta_1)c(\theta_2)c(\theta_3) + 150s(\theta_1)c(\theta_2)$$

$$Pz = 100.25s(\theta_2)c(\theta_3) + 150s(\theta_2) + 100.25s(\theta_3)c(\theta_2) + 60.251$$

4.2.Solución computacional cinemática directa

Después de programar un algoritmo para el cálculo computacional (Python) se probó para distintos ángulos de θ , y se obtiene los siguientes resultados, que son, los mismos que se determinan al remplazar analíticamente los ángulos de prueba en la matriz resultante citada en este apéndice.

Valores de los ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$	Px	Py	Pz
$\theta_1 = 30, \theta_2 = 45, \theta_3 = 60$	69.39	40.06	263.15
$\theta_1 = 90, \theta_2 = 30, \theta_3 = 45$	0.00	155.85	232.08

Tabla 3. Resultados obtenidos para varios valores de $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

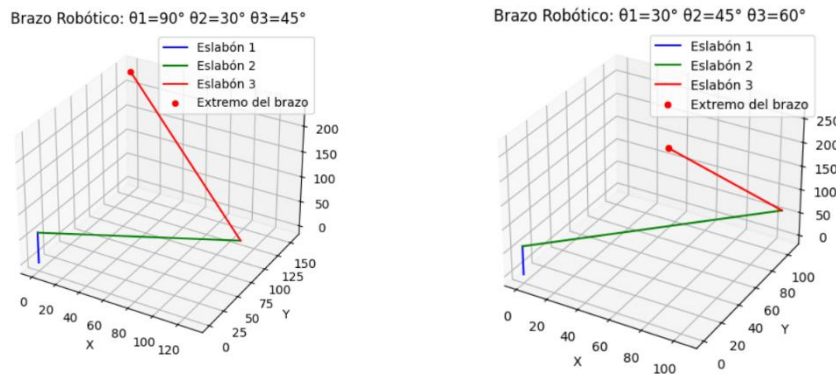


Fig. 5. Ubicación gráfica de la posición del efector final para distintos tipos de θ_1 , θ_2 , θ_3

Después de analizar los datos y resultados obtenidos podemos plantear el siguiente análisis o discusión:

- El análisis de la cinemática directa del brazo robótico de 3DOF muestra que la posición y orientación del efector final dependen directamente de las funciones seno y coseno de los ángulos articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 . Esto implica que cualquier variación en estos ángulos genera un cambio en la configuración espacial del extremo del brazo, lo que confirma la naturaleza no lineal del sistema.
- Las ecuaciones obtenidas para P_x, P_y, P_z indica que el robot no solo tiene un movimiento rotacional en la base, controlado por θ_1 , sino que la posición en X y Y también depende de cómo se flexionan los eslabones controlados por θ_2 y θ_3 .

5. CONCLUSIONES

La investigación demuestra que el modelado matemático basado en la cinemática directa es una herramienta fundamental para predecir con precisión las trayectorias y posiciones de un brazo robótico con 3DOF dentro de su espacio de trabajo. La comparación entre los enfoques analítico y computacional confirma la validez del modelo, proporcionando una base confiable para el control y optimización del desempeño del robot.

Se ha desarrollado un modelo matemático accesible que facilita la comprensión de la cinemática de los brazos robóticos. Este enfoque permite a estudiantes e investigadores analizar el comportamiento del sistema de manera intuitiva, promoviendo un aprendizaje más profundo sobre el diseño y control de manipuladores robóticos.

Los resultados obtenidos demuestran que el modelo propuesto contribuye a mejorar el control y la precisión en la ejecución de movimientos del brazo robótico. Al proporcionar una descripción detallada de la cinemática del sistema, se establecen bases sólidas para la optimización del desempeño del robot en aplicaciones prácticas.

La comparación entre el enfoque analítico y el computacional valida la precisión del modelo matemático, confirmando su utilidad como herramienta de análisis y optimización. Esta validación refuerza la aplicabilidad del modelo en entornos educativos e industriales, asegurando su fiabilidad para el desarrollo de estrategias de control más eficientes.

CONFLICTO DE INTERESES

Los Autores declaran que no existe conflicto de intereses, o lo que corresponda.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORÍA

En concordancia con la taxonomía establecida internacionalmente para la asignación de créditos a autores de artículos científicos (<https://credit.niso.org/>). Los autores declaran sus contribuciones en la siguiente matriz:

	Carrión Cevallos Mónica Alexandra.	Colcha Arrieta Juan Carlos	
Participar activamente en:			
Conceptualización	X	X	
Análisis formal	X		
Adquisición de fondos	X		
Investigación	X		
Metodología	X	X	
Administración del proyecto	X		
Recursos	X		
Redacción –borrador original	X		
Redacción –revisión y edición	X	X	
La discusión de los resultados	X	X	
Revisión y aprobación de la versión final del trabajo.	X	X	

REFERENCIAS (APA 7)

- Alvarado, N., & Gualteros, Y. (2019). Diseño de un brazo robótico para utilizar en un laboratorio de automatización. Universidad de América.
- Arias, J. L. R., & Fonseca, A. R. (2012). Modelamiento matemático de la cinemática directa e inversa de un robot manipulador de tres grados de libertad. *Ingeniería Solidaria*, Article 15.
- Barrientos, A., Álvarez, M., Hernández, J. D., Del Cerro, J., & Rossi, C. (2012). Modelado de Cadenas Cinemáticas mediante Matrices de Desplazamiento. Una alternativa al método de Denavit-Hartenberg. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 9(4), 371–382.
<https://doi.org/10.1016/j.riai.2012.09.004>
- Cáceres Núñez, F. A. (2023). Justificación teórica del modelado matemático cinemático de un robot manipulador de cuatro grados de libertad [Escuela Superior Politécnica de Chimborazo].
<http://dspace.esPOCH.edu.ec/handle/123456789/21715>
- Castillo, J. V. (2022). Aplicación de las Matemáticas en el Modelado de un Brazo Robótico y Simulación con Matlab y Simulink. *Revista Ciencia y Tecnología Informática*, 3, 10.
- Dueñas Vargas, N., & Loja Ávila, C. E. (2024). Diseño de un robot serial prototipo de cuatro grados de libertad para el laboratorio de robótica de la Universidad Politécnica Salesiana.
<http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/28433>
- Fetter, W. (2022). Parámetros de Denavit-Hartenberg. 10.

- Graterol, Y. G. (2024). Innovación educativa: Robótica y electromagnetismo respondiendo a los desafíos del futuro. RICT Revista de Investigación Científica, Tecnológica e Innovación, 2(4), Article 4. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14189667>
- López, N. M., di Sciascio, F., Orosco, E., Ledesma, J. N., & Echenique, A. M. (2006). Control Mioeléctrico de un Brazo Robótico. 4.
- Monroy Cruz, E., García Paredes, V., Manzo Hernández, D., & Marmolejo, I. (2020). Diseño y construcción de un brazo robótico para la línea de producción entrenadora. 8.
- Ramírez-López, L. A., & Martínez-Aragón, M. (2022). Seguimiento de trayectorias mediante cinemática diferencial aplicado en robots manipuladores. Padi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías Del ICBI, 10(Especial6), 86–90. <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial6.9209>
- Reyes Cortez, F. (2012). Matlab: Aplicado a robótica y mecatrónica. Alpha Editorial.
- Sanz-Fernández, W. (2021). Enseñanza y Aprendizaje de Robótica Industrial desde la Virtualidad. Revista Docentes 2.0, 11(2), 19–27. <https://doi.org/10.37843/rted.v11i2.245>
- Suquilanda, D., Suarez Figueroa, N. M., & Mora Figueroa, A. A. (2024). Simulación avanzada de un brazo robótico con 2 grados de libertad, controlado en Simscape (No. 06). 1(06), Article 06. <https://doi.org/10.61582/r8jr5194>
- Velásquez Correa, S., & Luces, J. (2014). Modelado matemático de brazo robot con 3DoF usando Matlab. Ciencia e Ingeniería: Revista de investigación interdisciplinar en biodiversidad y desarrollo sostenible, ciencia, tecnología e innovación y procesos productivos industriales, 1(2), 7.

APÉNDICE

Algoritmo 1. Programación para el cálculo de Cinemática Directa del brazo robótico aplicando la metodología de Denavit-Hartenberg.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de las funciones trigonométricas en radianes
def cos_deg(x):
    return np.cos(np.radians(x))

def sin_deg(x):
    return np.sin(np.radians(x))

# Matriz de transformación homogénea para el eslabón i
def T_matrix(alpha, a, d, theta):
    # Crear la matriz usando la ecuación de Denavit-Hartenberg
    T = np.array([
        [cos_deg(theta), -sin_deg(theta) * cos_deg(alpha), sin_deg(theta) *
sin_deg(alpha), a * cos_deg(theta)],
        [sin_deg(theta), cos_deg(theta) * cos_deg(alpha), -cos_deg(theta) *
sin_deg(alpha), a * sin_deg(theta)],
        [0, sin_deg(alpha), cos_deg(alpha), d],
        [0, 0, 0, 1]
    ])
    return T
```

```

# Cinemática directa del brazo robótico con 3 grados de libertad
def cinematica_directa(theta1, theta2, theta3):
    # Definir los parámetros DH para cada eslabón
    alpha1, a1, d1 = 90, 0, 60.25
    alpha2, a2, d2 = 0, 150, 0
    alpha3, a3, d3 = 0, 100.25, 0

    # Obtener las matrices de transformación para cada eslabón
    T1 = T_matrix(alpha1, a1, d1, theta1)
    T2 = T_matrix(alpha2, a2, d2, theta2)
    T3 = T_matrix(alpha3, a3, d3, theta3)

    # Multiplicar las matrices de transformación para obtener la posición final
    T_final = np.dot(np.dot(T1, T2), T3)

    # La posición final del extremo del brazo (Px, Py, Pz) es la última columna de
    T_final
    Px = T_final[0, 3]
    Py = T_final[1, 3]
    Pz = T_final[2, 3]

    # Obtener las posiciones de las articulaciones
    P1 = T1[0, 3], T1[1, 3], T1[2, 3]
    P2 = T1[0, 3] + T2[0, 3], T1[1, 3] + T2[1, 3], T1[2, 3] + T2[2, 3]
    P3 = Px, Py, Pz

    return P1, P2, P3, Px, Py, Pz

# Ángulos de las articulaciones (en grados)
theta1 = 30 # Ángulo de la primera articulación
theta2 = 45 # Ángulo de la segunda articulación
theta3 = 60 # Ángulo de la tercera articulación

# Obtener las posiciones del brazo
P1, P2, P3, Px, Py, Pz = cinematica_directa(theta1, theta2, theta3)

# Graficar el brazo robótico y la posición del efector final
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Graficar los eslabones del brazo
ax.plot([0, P1[0]], [0, P1[1]], [0, P1[2]], label="Eslabón 1", color="blue")
ax.plot([P1[0], P2[0]], [P1[1], P2[1]], [P1[2], P2[2]], label="Eslabón 2",
color="green")
ax.plot([P2[0], P3[0]], [P2[1], P3[1]], [P2[2], P3[2]], label="Eslabón 3", color="red")

# Graficar el extremo del brazo (efector final)
ax.scatter(Px, Py, Pz, color='red', label="Extremo del brazo")

# Etiquetas y título
ax.set_xlabel('X')

```

```
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
ax.set_title(f'Brazo Robótico:  $\theta_1={\theta_1}^\circ$   $\theta_2={\theta_2}^\circ$   $\theta_3={\theta_3}^\circ$ ')

# Mostrar la leyenda
ax.legend()

# Mostrar la gráfica
plt.show()
```