Artículo de Investigación Original

Sobre la existencia y el número de raíces cuadradas de una matriz

On the existence and number of square roots of matrices

Paúl Freire Díaz [1][0000-0002-0657-9717], Henry Mauricio Villa Yánez [2][0000-0003-4076-5211], Sonia Ríos-Alvares [3][0009-0009-7726-9212], Richard Miguel García Ríos [4][0009-0005-7589-8366], Ximena López-Mendoza [5][0000-0002-9564-6300]

[1] Universidad Nacional de Chimborazo – Ecuador, jpfreire@unach.edu.ec.
[2] Universidad Nacional de Chimborazo – Ecuador, hvilla@unach.edu.ec,
[3] Investigadora Independiente – Ecuador, soniariosrbba@gmail.com,
[4] Investigador Independiente – Ecuador, richgar14@gmail.com,
[5] Universidad Estatal de Milagro – Ecuador, xlopezm2@unemi.edu.ec

CITA EN APA:

Freire Diaz, P., Villa Yánez, H. M., Ríos-Alvares, S., García Ríos, R. M., & López-Mendoza, X. (2025). Sobre la existencia y el número de raíces cuadradas de una matriz. Technology Rain Journal, 4(2). https://doi.org/10.55204/trj.v4i2.e90

Recibido: 05 de Junio-2025
Aceptado: 18 de septiembre-2025
Publicado: 07 de octubre-2025

Technology Rain Journal
ISSN: 2953-464X

Resumen.
A diferencia de con los escalares, calcular las raíces cuadradas de una matriz, determinar su existencia y su cantidad no es sencillo. Centrado en la ecuación matricial $X^2 = A$, el presente trabajo trató tres aspectos: la existencia de matrices que carecen de raíces cuadradas, matrices con un número finito de raíces cuadradas y matrices que admiten infinitas raíces. Se realizaron demostraciones analíticas con ejemplos representativos usando proposiciones, teoremas de álgebra lineal y contraejemplos, además de una validación empírica para cada caso usando algoritmos computacionales. Los resultados muestran que no es posible encontrar raíces cuadradas de matrices defectivas; las matrices diagonalizables con sus autovalores distintos entre sí tienen exactamente 2^n soluciones y, que de una matriz identidad se pueden encontrar un número infinito de raíces. La metodología usada parte de un análisis teórico para posteriormente realizar una verificación computacional, con la intensión de que este estudio sea replicable y establecer una base para investigaciones sobre ecuaciones matriciales de orden superior con aplicaciones en múltiples áreas.

Palabras Clave: Matrices, Raíces de una Matriz, Álgebra Lineal.

.

Abstract:

Unlike the scalar case, calculating the square roots of a matrix — as well as determining their existence and number — is not straightforward. Focusing on the matrix equation $X^2 = A$, this work addresses three main aspects: the existence of matrices that lack square roots, matrices with a finite number of square roots, and matrices that admit infinitely many. Analytical demonstrations with representative examples were carried out using propositions, linear algebra theorems, and counterexamples, along with empirical validation for each case through computational algorithms. The results show that defective matrices do not have square roots, diagonalizable matrices with all distinct eigenvalues have exactly 2^n solutions, and the identity matrix has an infinite number of roots. The combination of theoretical analysis and computational verification makes this study reproducible and provides a foundation for further research on higher-order matrix equations with applications in various fields

Keywords: Matrices, Matrix Roots, Linear Algebra

1. INTRODUCCIÓN

Es la raíz cuadrada de una matriz $A \in C^{n\times n}$ toda matriz X donde se cumple que:

$$X^2 = A$$

A diferencia de la raíz cuadrada de un escalar, una matriz podría no tener ninguna raíz cuadrada, o tener un número finito o infinito de éstas (Amat et al., 2015; Lin & Liu, 2001). Obtener las raíces cuadradas de una matriz es una tarea compleja, y si se trata de matrices de gran dimensión resulta imprescindible recurrir a programas y algoritmos numéricos e informáticos (Sherif, 1991).

Sobre el tema de la presente investigación muchos textos modernos de álgebra lineal tratan breve o únicamente mencionando su aplicación dentro de procesos de cálculo o de métodos numéricos (Asmar Charris & Menco Mendoza José T., 1995; Rubiales Camino, 2005), aunque existen algunos trabajos muy detallados como (Higham, 1997, 2008) que han sido ampliamente referenciados en esta área.

El cálculo de las raíces cuadradas de matrices se encuentra inmerso en muchos problemas de ingeniería, ciencia, e incluso de salud. Dentro del control automático (Aguado, 2006) usa este concepto para lograr eficiencia computacional y robustez en sistemas de control. En (Higham & Lin, 2011) se analiza el uso de matrices de transición para representar las probabilidades de cambios en la calificación crediticia en un intervalo de tiempo, generalmente anual; pero cuando se requiere estudiar esto a plazos de tiempo menores, es necesario obtener las raíces cuadradas de la matriz anualizada. Esta misma situación aparece en modelos de progresión de enfermedades crónicas.

En (Nazari et al., 2013) se realizan demostraciones a través de ejemplos resueltos manualmente de la obtención de las raíces cuadradas de matrices de orden 2 y 3, lo que permite entender conceptos básicos de matrices y sus operaciones. Empleando la teoría de funciones de matrices, (Higham & Lin, 2011) obtienen criterios de existencia y caracterización de raíces reales y estocásticas.

El objetivo de este artículo es mostrar, con casos particulares y usando conceptos elementales de álgebra lineal, que una matriz $A \in C^{n\times n}$ puede tener un número finito o infinito de raíces cuadradas o incluso no tener ninguna. Para esto, se exponen 3 acápites: Inexistencia de raíces cuadradas para ciertas matrices, existencia de matrices con número finito de raíces cuadradas y, existencia de matrices con infinitas raíces cuadradas.

2. METODOLOGÍA

La metodología principal empleada es deductiva y teórico matemática. Partiendo de axiomas y teoremas del álgebra lineal y mediante inferencia lógica, se llega a conclusiones particulares sobre la existencia y el número de raíces cuadradas de una matriz. Este estudio caracteriza la ecuación matricial $X^2 = A$ donde $A \in C^{n\times n}$, desde tres puntos de vista: en primer lugar, se muestra con un caso particular que existen matrices que no poseen ninguna raíz cuadrada. En segundo lugar, siguiendo la misma lógica, se muestra un caso en el cual existen exactamente 2^n raíces cuadradas distintas, para finalmente con el ejemplo de la matriz de la identidad I_2 mostrar que se la matriz A puede tener un infinito número de raíces cuadradas. Para esto se usaron proposiciones formales, contraejemplos, resultados validados en investigaciones similares y en teoremas clásicos con demostraciones publicadas y citadas.

Se añade al tratamiento analítico un componente computacional con el fin de corroborar los resultados matemáticos, utilizando algoritmos (scripts) de MATLAB versión R2023a para automatizar la verificación de la existencia de una, ninguna o infinitas raíces cuadradas de matrices siguiendo los criterios descritos analíticamente. Al usar estos enfoques, analítico y computacional, se puede contrastar y comprobar la validez de los resultados.

Inexistencia de raíces cuadradas para ciertas matrices

Si A es una matriz invertible compleja, siempre tendrá raíces cuadradas, pero las matrices singulares (es decir, las que no tienen inversa) podrían no tenerla (Gallier, 2011). Según (R. A. Horn & Johnson, 2012) "una matriz A posee raíces cuadradas si y solo si en la descomposición de Jordan de A ningún autovalor presenta dos bloques consecutivos del mismo tamaño impar". También (Higham, 1997) afirma que la inexistencia de raíces cuadradas depende directamente de la estructura de Jordan y que además cuando A es defectiva, es decir no es diagonalizable y no admite un conjunto completo de vectores propios linealmente independientes, la existencia de raíces cuadradas se ve aún más restringida.

Lo anterior se puede mostrar con una matriz concreta A para la cual la ecuación matricial $X^2 = A$ no tiene solución en $C^{n\times n}$.

Un ejemplo clásico de matriz sin raíces cuadradas es el bloque de Jordan $J_2(0)$:

$$J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, de tamaño 2 con valor propio $\lambda = 0$, que además es una matriz nilpotente de orden 2, es decir que al elevarlo a la potencia 2 resulta una matriz nula y que hay un solo bloque impar de tamaño 2 para $\lambda = 0$.

$$\left(J_2(0)\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se utiliza esta matriz como ejemplo porque es el bloque nilpotente más pequeño que no es trivial. El caso trivial es $J_1(0) = [0]$, pero usarlo no permite obtener nueva información, ya que siempre es su propia raíz cuadrada.

Suponiendo que existen las matrices:

$$A = J_2(0)$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Tal que $X^2 = A$, entonces:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

Por la condición impuesta inicialmente,

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$a^2 + bc = 0,$$

$$ab + bd = 1,$$

$$ca + dc = 0,$$

$$cb + d^2 = 0.$$

Realizando el análisis del sistema:

1. De $ca + dc = 0$ se factoriza $c(a + d) = 0$

   Si $c \neq 0$, entonces $a = -d$
2. Con $cb + d^2 = 0$ y $a = -d$ se obtiene $d(d - b) = 0$.

   Si $d = 0 \Rightarrow\ a = 0 \Rightarrow$ segunda ecuación da $0 = 1$, produciéndose una contradicción.

   Si $d = b \neq 0$, la primera ecuación se convierte en

$$(-d)^2 + d(-d) = d^2 - d^2 = 0$$

Siendo esto coherente, pero la segunda ecuación exige $ab + bd = -d^2 + d^2 = 0$, lo que es una contradicción.

3. Si $c = 0$, entonces la tercera ecuación da $d = 0$.
   La segunda ecuación se reduce a $ab = 1$, pero al resolver la primera se tiene que
   $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$, volviéndose esto imposible.

El sistema es incompatible; no existe X para $X^2 = A$. Por lo tanto, en este caso $A = J_2(0)$ no admite raíces cuadradas, demostrando la existencia de matrices que no poseen raíces cuadradas.

Este hallazgo puede aplicarse a bloques de Jordan de mayor dimensión. Sea $J_n(0)$ el bloque de Jordan nilpotente con unos en la superdiagonal:

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asumiendo que X satisface $X^2 = J_n(0)$, entonces se tendría:

$$(X^2)_{ii} = X_{ii}^2 = J_{ii} = 0 \ \Rightarrow X_{ii} = 0 \text{ para todo } i$$

Es decir, sus diagonales deberían anularse, lo que no sucede al existir valores de 1 en la superdiagonal.

Existencia de Matrices con número finito de raíces

Una matriz que tiene todos sus autovalores diferentes se conoce como matriz diagonalizable con espectro simple, debido a que cada valor propio es simple, lo que garantiza que se puede diagonalizar utilizando un conjunto completo de vectores propios linealmente independientes. En (Higham, 1987), se muestra el por qué una matriz con espectro simple tiene exactamente 2^n raíces cuadradas distintas, que es un valor finito. Así mismo, en (Asmar Charris & Menco Mendoza José T., 1995) se muestra que toda matriz diagonizable tiene raíces cuadradas.

Es necesario para evitar posibles singularidades en la demostración considerar que los autovalores son no nulos. Por ejemplo, una matriz diagonal:

$$B = diag(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene exactamente cuatro raíces cuadradas distintas: $diag(\pm 1, \pm\sqrt{2})$.

Siendo $A \in C^{n\times n}$ una matriz diagonalizable, la demostración de la existencia de matrices con un número finito de raíces se realiza a partir de:

$$A = P\,D\,P^{-1}, \quad D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

donde

- P es una matriz invertible, cuyas columnas son los autovectores de A
- $\lambda_i \neq \lambda_j \; para \; i \neq j$ (es decir, con autovalores simples)
- $\lambda_i \neq 0 \forall i$ (evitando singularidades).

Partiendo de la ecuación matricial $X^2 = A,$ multiplicándola a la derecha por X y pasando a restar a la izquierda tenemos:

$$X^2X - XX^2 = 0 \Rightarrow XA = AX$$

Lo que permite concluir que cualquiera de las raíces cuadradas conmuta con A. Un operador que conmuta con una matriz diagonalizable de autovalores simples es polinomio en ella, debido a que los autovalores de A son distintos, y por tanto el álgebra conmutante de A está formada únicamente por los polinomios en A (R. Horn & Johnson, 1985).

Siendo p un polinomio en la variable indeterminada t, con grado menor que n, con coeficientes pertenecientes al cuerpo de los números complejos:

$$X = p(A) \;,\; p \in C[t], \;\; deg(p) < n$$

Esto significa que el polinomio p (de grado $< n$) se aplica a la matriz A, evaluando cada potencia t^i como A^i. De este modo X queda expresado como combinación lineal de $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

En la base que diagonaliza a A, tanto A como X son matrices diagonales:

$$P^{-1}XP = p\,(diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = diag\big(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)\big)$$

La igualdad $X^2 = A$ en la base diagonal se reduce a un sistema escalar independiente para cada autovalor:

$$(p(\lambda_i))^2 = \lambda_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

Entonces, cada ecuación escalar admite exactamente dos soluciones:

$$p(\lambda_i) = \pm\sqrt{\lambda_i}$$

Debido a que para cada autovalor λ_i se tiene dos independientes elecciones de signo para cada i=*1, …n*, entonces hay $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ combinaciones posibles. Ningún otro X existe, porque todas las raíces cuadradas deben pertenecer al álgebra conmutante. En resumen, el número de raíces cuadradas es finito y exactamente 2^n, siempre que A sea diagonalizable con valores propios simples distintos de 0.

Existencia de matrices con infinitas raíces cuadradas

En el trabajo de (van Rensburg et al., 2020) se demuestra que una matriz no negativa tiene raíces cuadradas si y solo si no tiene valores propios negativos y no tiene bloques de Jordan de tamaño dos asociados al valor propio cero. Esto implica que debe ser diagonalizable y que sus bloques de Jordan asociados al valor propio cero son de tamaño uno. Estas condiciones se verifican en cualquier matriz identidad I_n, que ya es diagonal con cada valor propio 1 con un bloque de Jordan de tamaño 1 y no posee bloques de tamaño 2 o mayores.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Partiendo del ejemplo concreto de la matriz identidad I_2 se puede mostrar la existencia de una matriz con un número infinito de raíces cuadradas, lo que posteriormente permite deducir un principio general. Sea la matriz identidad de orden 2:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y definiendo para cada ángulo $\theta \in [0,2\pi)$, la matriz:

$$X(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que $(X(\theta))^2 = I_2$

$$(X(\theta))^2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Debe tomarse en cuenta que:

$$X(\theta + \pi) = -X(\theta)$$

Y por tanto $X(\theta)$ como $-X(\theta)$ son raíces cuadradas de I_2, ya que si $X^2 = I_2$ entonces también $(-X)^2 = I_2$.

Así en este ejemplo cada matriz $X(\theta)$ es una raíz cuadrada de la matriz identidad I_2, debido a que el ángulo θ puede tomar valores del intervalo continuo $[0,2\pi)$, y si $\theta_1 \neq \theta_2 (mod\ \pi)$ entonces se tendrá que $X(\theta_1) \neq X(\theta_2)$, y el conjunto $\{X(\theta) \mid \theta \in [0,2\pi)\}$ incluye un continuo de raíces cuadradas que son todas diferentes entre sí, demostrando que I_2 tiene infinitas raíces cuadradas.

La razón es que I_2 tiene un único autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2, implicando que su subespacio propio sea de dimensión 2, lo que permite rotar libremente la base. Consecuentemente para cualquier matriz ortogonal X con $X^2 = I_2$ obtenemos que X es la raíz cuadrada de I_2. Así, las infinitas involuciones que existen en cualquier espacio de dimensión > 1 generan un continuo de raíces cuadradas. Esto se observa nuevamente revisando un ejemplo concreto en R^2, en una función dada $Q(\theta)$ donde para cada ángulo θ se define la reflexión respecto a la recta que forma ángulo θ con el eje x:

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Con un procedimiento análogo al primer ejemplo, se demuestra la igualdad:

Calculemos $(X(\theta))^2$:

$$(Q(\theta))^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta & \cos 2\theta \sin 2\theta - \cos 2\theta \sin 2\theta \\ \sin 2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Se puede verificar que $Q(\theta)$ es ortogonal (es decir que su transpuesta es su inversa), que $(Q(\theta))^2 = I_2$, y que al variar θ se obtiene una familia continua de raíces cuadradas de I_2, tal cual como con $X(\theta)$ pero con el parámetro 2θ. Esto muestra que no importa la forma exacta de parametrización, siempre que el bloque actúe en un subespacio propio de dimensión ≥ 2 de lugar a familias continuas de raíces cuadradas.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Tras el desarrollo del análisis deductivo referente a la ecuación matricial $X^2 = A$, se establecen tres resultados: Existen (i) matrices sin raíces cuadradas, (ii) matrices con número finito de raíces cuadradas, y (iii) matrices con un conjunto infinito de raíces cuadradas.

Para respaldar empíricamente estos resultados, se implementaron algoritmos en MATLAB que automatizan la demostración con la posibilidad del uso de matrices de mayor dimensión a las utilizadas en la demostración analítica. Se incluyen los códigos con la intensión de proporcionar un medio para replicar y analizar de forma independiente los hallazgos descritos.

3.1 No de todas las matrices se puede obtener al menos una raíz cuadrada: Un único bloque nilpotente impar, como por ejemplo el bloque de Jordan $J_2(0)$ hace imposible encontrar X con $X^2 = J_2(0)$.

Esto se puede visualizar usando el Algoritmo 1 en MATLAB, que construye una matriz $J_n(0)$ de orden arbitrario, con ceros en la diagonal y unos en la superdiagonal inmediata. El parámetro *n* por defecto se establece n=3, pero puede ser ingresado por el usuario, debiendo ser un número natural mayor a 2. Como muestra, se analiza a continuación el resultado del algoritmo con el valor por defecto de *n*.

Algoritmo 1. Demostración con cálculo simbólico en MATLAB de la inexistencia de X tal que $\boldsymbol{X^2 = J_n(0)}$, para n >=2.

```
% no_root_Jordan.m
    function no_root_Jordan(n)
        if nargin<1, n=3; end
        if n<2, error('n debe ser >= 2'); end
        % Bloque de Jordan J_n(0)
        J = sym(zeros(n));
        for i=1:n-1, J(i,i+1)=1; end
        % Matriz simbólica X triangular superior
        X = sym('x',[n n]);
        for i=1:n, for j=1:i-1, X(i,j)=0; end, end
        % Calcular X^2
        S = simplify(X*X);
        % Ecuaciones diagonales: obligan a X_ii = 0
        diag_eqs = arrayfun(@(k) S(k,k)==0,1:n,'UniformOutput',false);
        % Sustituir X_ii=0 en la primera superdiagonal
        subs_from = diag(X).';
        superdiag = simplify(subs(S(1,2),subs_from,zeros(1,n)));
        fprintf('Bloque J_%d(0):\n',n); disp(J);
        fprintf('Después de imponer X_ii=0:\n');
        fprintf('(X^2)(1,2) = %s, pero J(1,2) = 1\n',char(superdiag));
        fprintf('=> Contradicción: no existe raíz cuadrada.\n');
    end
```

Con las condiciones mencionadas, el Algoritmo 1 construye una matriz $J_3(0)$ y también una matriz X simbólica triangular superior, dado que si existiera una raíz cuadrada de una matriz triangular de cualquier $J_n(0)$ debería poderse triangularizar:

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} \\ 0 & X_{2,2} & X_{2,3} \\ 0 & 0 & X_{3,3} \end{pmatrix}$$

A continuación, se calcula X^2 (simbólica), obteniéndose:

$$X^2 = \begin{pmatrix} X_{1,1}^2 & X_{1,2} * (X_{1,1} + X_{2,2}) & X_{1,1} * X_{1,3} + X_{1,2} * X_{2,3} + X_{1,3} + X_{3,3} \\ 0 & X_{2,2}^2 & X_{2,3} * (X_{2,2} + X_{3,3}) \\ 0 & 0 & X_{3,3}^2 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones diagonales deben cumplir que las entradas diagonales deben ser cero tal cual $J_n(0)\ X_{ii}^2 = 0$, pero en función de que el valor de $J_3(0)$ en la entrada (1,2) es 1, se tiene:

$$X_{1,2} * (X_{1,1} + X_{2,2}) = 1$$

En la parte final del algoritmo se describe las imposiciones iniciales $X_{i,i} = 0$; $X_{1,2}^2 = 0$; pero se tiene que la primera entrada $J(1,2)$ es 1. Siendo esto contradictorio, se demuestra que no existe X tal que $X^2 = J_3(0)$. Finalmente, el algoritmo arroja la conclusión automática: "Contradicción: no existe raíz cuadrada", lo que concuerda con el desarrollo analítico.

3.2 La cantidad posible de raíces depende únicamente de si los autovalores de A son todos distintos o están repetidos. Si se tiene valores propios todos distintos implica exactamente un número finito de 2^n raíces.

El **Algoritmo 2**, codificado en MATLAB, encuentra las raíces cuadradas de matrices de cualquier dimensión que cumplan las condiciones descritas, siguiendo el proceso analítico usado en el apartado anterior: construye una matriz $A = P\,D\,P^{-1}$ con autovalores distintos y no nulos, para luego con una función recursiva generar todas las 2^n combinaciones de signos, es decir, las raíces cuadradas posibles. Finalmente, muestra cada raíz *X*. Como ejemplo, se ha elegido una matriz con cuatro autovalores [2, 5, 7, 11], mismos que pueden ser reemplazados por otros valores o incrementarse para generar matrices de mayor dimensión.

Algoritmo 2. Código de MATLAB para obtener las raíces cuadradas de una matriz $A = P\,D\,P^{-1}$ con espectro simple (autovalores distintos y no nulos)

```
clear; clc; rng(3);
% Definimos los autovalores (distintos y no nulos)
lambda = [2, 5, 7, 11];
D = diag(lambda);
n = length(lambda);
% Matriz de autovectores (aleatoria invertible)
P = randn(n) + 1i*randn(n);
while cond(P) > 1e8
    P = randn(n) + 1i*randn(n);
end
% Construimos la matriz A
A = P * D / P;
% Generar las 2^n raíces
roots_all = genRoots(P,lambda,1,[]);
% Mostrar resultados
fprintf('Matriz A:\n'); disp(A);
fprintf('Número de raíces cuadradas posibles: %d\n\n', numel(roots_all));
for k = 1:numel(roots_all)
    X = roots_all{k};
    disp(X);
end

% Función recursiva para generar todas las raíces
function rootsList = genRoots(P,lambda,idx,current)
    if idx > length(lambda)
        S = diag(current .* sqrt(lambda));
        X = P * S / P;
        rootsList = {X};
    else
        roots1 = genRoots(P,lambda,idx+1,[current, +1]);
        roots2 = genRoots(P,lambda,idx+1,[current, -1]);
        rootsList = [roots1, roots2];
    end
end
```

Al correr el script, se visualiza en la ventana de comandos de MATLAB en primer lugar la Matriz A, y a continuación cada una de sus posibles raíces cuadradas, un total de 16 raíces en este caso, corroborando que existen matrices con un número finito de raíces cuadradas.

3.3 Existen matrices con un número infinito de raíces cuadradas, siendo verificable a través de la matriz identidad, que admite infinitas soluciones procedentes de la multiplicidad de transformaciones ortogonales que satisfacen la ecuación $X^2 = I$.

Se analizará el caso de I_4 con el Algoritmo 3 implementado en MATLAB, en donde se inserta el mismo bloque $X(\theta)$ utilizado con I_2, generando infinitas raíces cuadradas parametrizadas por el ángulo θ.

Algoritmo 3. Código en Matlab que genera la visualización de la familia de $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\theta})$ para $\boldsymbol{I_4}$

```
clear; clc; close all;
% Rango de theta
```

```
theta = linspace(0, 2*pi, 200);
% Inicializar matrices para guardar entradas del bloque X(theta)
a = zeros(size(theta)); % cos(theta)
b = zeros(size(theta)); % sin(theta)
d = zeros(size(theta)); % -cos(theta)
% Bucle para construir Q(theta) y guardar entradas
for k = 1:length(theta)
    Q = [cos(theta(k))  sin(theta(k)) 0 0;
         sin(theta(k)) -cos(theta(k)) 0 0;
         0             0             1 0;
         0             0             0 1];
    a(k) = Q(1,1);
    b(k) = Q(1,2);
    d(k) = Q(2,2);
    end
%% Gráfico 3D de las entradas variables
figure;
plot3(a, b, d, 'LineWidth', 2);
xlabel('a = cos(\theta)'); ylabel('b = sin(\theta)'); zlabel('d = -cos(\theta)');
title('Trayectoria de las entradas del bloque X(\theta) en Q(\theta)');
grid on; axis equal;
```

El algoritmo en primer lugar define $Q(\theta) \in R^{4\times4}$:

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La Fig. 1 generada por el Algoritmo 3, muestra en tres dimensiones que las entradas del bloque $X(\theta)$ son las que varían mientras que el bloque inferior I_2 permanece fijo. Para los ejes de la gráfica se ha definido $x = a = \cos\theta$; $y = b = \sin\theta$; $z = d = -\cos\theta$.

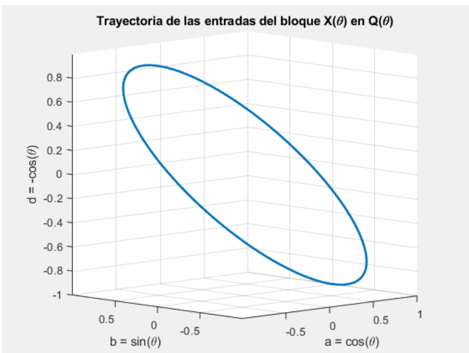

Fig. 1. Curva en tres dimensiones que muestra la variación continua de las entradas $X(\theta)$ ante el cambio de θ, correspondiendo cada punto sobre la curva a una raíz distinta de I_4.

Se puede visualizar que la curva de la Fig. 1 es suave y cerrada en todo su trayecto $\theta \in [0,2\pi)$, en concordancia con la conclusión teórica del acápite anterior: un autovalor con una multiplicidad geométrica ≥ 2 produce infinitas raíces cuadradas.

En los 3 casos tratados, los resultados concuerdan con la teoría moderna de funciones matriciales, tal como exponen (R. A. Horn & Johnson, 2012) y (Higham, 2008). Si bien estos conceptos se abordan en (Rubiales Camino, 2005) y (Asmar Charris & Menco Mendoza José T., 1995) las conclusiones se basan en su mayoría en casos particulares, sin llegar a la generalidad. Sin embargo, los ejemplos presentados por los citados autores permiten comprender de una manera intuitiva la complejidad del cálculo de raíces de matrices, así como métodos para su cálculo manual. Adicionalmente los resultados numéricos obtenidos en los tres casos mediante los algoritmos implementados en MATLAB son consistentes con los hallazgos teóricos. Estos scripts permiten replicar los resultados y explorar a otros casos de investigación.

4. CONCLUSIONES

Los hallazgos obtenidos en este estudio muestran que la ecuación matricial $X^2 = A$ tiene diferentes resultados, dependientes de sus autovalores y propiedades algebraicas. Con el uso de los enfoques teórico y computacional se demostró que:

1. No todas las matrices tienen al menos una raíz cuadrada, como se puede observar en las matrices no diagonalizables o nilpotentes, donde las ecuaciones resultantes no tienen solución.
2. El número de raíces cuadradas de A puede ser finito. Esto se presenta en matrices con todos sus autovalores distintos, que arrojan exactamente 2^n soluciones.
3. Hay matrices que poseen un número infinito de raíces cuadradas; un ejemplo representativo de esto es la matriz identidad que, debido a su estructura, permite generar infinitas soluciones a partir de transformaciones ortogonales.

El desarrollo y análisis de algoritmos implementados en MATLAB proporcionó herramientas para verificar automáticamente las conclusiones descritas con diferentes parámetros, validando los resultados teóricos y presentando instrumentos para experimentación sobre el problema.

El uso de MATLAB u otras herramientas computacionales para incorporar métodos numéricos y algoritmos iterativos permite abordar problemas de mayor complejidad que requieren del cálculo de raíces de matrices de gran dimensión.

Con este estudio se establecen bases para la comprensión de la naturaleza del problema de las raíces cuadradas de matrices, mostrando que existen líneas de investigación para trabajos posteriores, como por ejemplo el análisis de ecuaciones matriciales polinómicas de orden superior de la forma $X^k = A$ con $k > 2$, para determinar las condiciones de existencia y multiplicidad de sus soluciones, lo cual permitiría explorar nuevas aplicaciones en áreas como el control automático, salud o finanzas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Red de Investigación en Ingeniería e Informática. Ri3.

CONFLICTO DE INTERESES

Los Autores declaran que no existe conflicto de intereses, o lo que corresponda.

CONTRIBUCIÓN DE AUTORÍA

En concordancia con la taxonomía establecida internacionalmente para la asignación de créditos a autores de artículos científicos (https://credit.niso.org/). Los autores declaran sus contribuciones en la siguiente matriz:

	Paúl Freire Díaz	Henry Mauricio Villa Yánez	Sonia Ríos-Alvares	Richard Miguel García Ríos	Ximena López-Mendoza
Participar activamente en:					
Conceptualización	X	X			
Análisis formal	X	X	X	X	X
Adquisición de fondos	X	X	X	X	X
Investigación	X	X	X	X	X
Metodología	X				
Administración del proyecto	X				
Recursos	X	X	X	X	
Redacción –borrador original	X	X			
Redacción –revisión y edición	X	X			
La discusión de los resultados	X	X	X	X	X
Revisión y aprobación de la versión final del trabajo.	X	X	X	X	X

RECONOCIMIENTO A REVISORES: (Espacio a ser llenado por la editorial)

La revista reconoce el tiempo y esfuerzo del editor / editor de sección “XXX XXXX”, y de revisores anónimos que dedicaron su tiempo y esfuerzo en la evaluación y mejoramiento del presente artículo.

REFERENCIAS

Aguado, A. (2006). Algoritmo de control predictivo-adaptable en el espacio de pseudo-estados. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, *3*(1), 52–62. https://polipapers.upv.es/index.php/RIAI/article/view/8108

Amat, S., Ezquerro, J. A., & Hernández-Verón, M. A. (2015). Iterative methods for computing the matrix square root. *SeMA Journal*, *70*(1), 11–21. https://doi.org/10.1007/s40324-015-0038-9

Asmar Charris, A., & Menco Mendoza José T. (1995). Acerca de la raíz cuadrada de una matriz. *Revista de la Facultad de Ciencias Universidad de Colombia*, *5*(1), 89–95.

Gallier, J. (2011). *Logarithms and Square Roots of Real Matrices Existence, Uniqueness and Applications in Medical Imaging*. https://www.researchgate.net/publication/228802024

Higham, N. J. (1987). Computing Real Square Roots of a Real Matrix. *Linear Algebra and Its Applications*, *88–89*, 405–430. https://doi.org/10.1016/0024-3795(87)90118-2

Higham, N. J. (1997). Stable iterations for the matrix square root. *Numerical Algorithms*, *15*, 227–242. https://doi.org/10.1023/A:1019150005407

Higham, N. J. (2008). *Functions of Matrices*. Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898717778

Higham, N. J., & Lin, L. (2011). On pth roots of stochastic matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, *435*(3), 448–463. https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.04.007

Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2012). *Matrix Analysis* (2nd ed.). Cambridge University Press. https://doi.org/DOI: 10.1017/CBO9781139020411

Horn, R., & Johnson, C. (1985). Eigenvalues, eigenvectors, and similarity. In *Matrix Analysis* (pp. 33–64). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511810817.003

Lin, L., & Liu, Z.-Y. (2001). On the Square Root of an H-matrix with Positive Diagonal Elements. *Annals of Operations Research*, *103*, 339–350. https://doi.org/10.1023/A:1012931928589

Nazari, A., Fereydooni, H., & Bayat, M. (2013). A manual approach for calculating the root of square matrix of dimension ≤ 3. *Mathematical Sciences*, *7*(44). http://www.iaumath.com/content/7/1/xx

Rubiales Camino, E. (2005). Raíz cuadrada de una matriz. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, *71*, 31–46. https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-89521/Boletin%2071%20de%20Soc%20PUIG%20ADAM.pdf

Sherif, N. (1991). On the Computation of a Matrix Inverse Square Root. *Computing*, *46*, 295–305. https://doi.org/10.1007/BF02257775

van Rensburg, D. B. J., van Straaten, M., Theron, F., & Trunk, C. (2020). *Square roots of H-nonnegative matrices*. http://arxiv.org/abs/2010.16238